PART2　三角関数の媒介変数表示

2　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t\ (t\neq\pm1)$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　(3)　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

Point Pickup

2 倍角の公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

および，三角関数の相互関係を利用することで証明できる。

第 9 講　PART2　確認問題

1　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ $(t \neq \pm 1)$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(3)　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

（証明）

(1)　$\tan\theta=\tan 2\cdot\boxed{ア}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(2)　$1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\boxed{エ}}$ より

$$\boxed{エ}=\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1}{1+t^2}$$

よって

$$\cos\theta=\cos 2\cdot\boxed{オ}=\boxed{カ}=2\cdot\boxed{キ}-1$$

$$=\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(3)　(1)，(2)より

$$\sin\theta=\boxed{ク}=\frac{2t}{\boxed{ケ}}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

[$\boxed{ア}$，$\boxed{オ}$ の選択肢]

①　θ　　②　$\dfrac{\theta}{2}$　　③　$(-\theta)$　　④　$(\pi-\theta)$

[イ の選択肢]

① $\tan\theta$　② $2\tan\theta$　③ $\tan^2\theta$

④ $\tan\dfrac{\theta}{2}$　⑤ $2\tan\dfrac{\theta}{2}$　⑥ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}$

[ウ の選択肢]

① $1+2\tan\theta$　② $1+2\tan\dfrac{\theta}{2}$　③ $1+\tan^2\theta$

④ $1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}$　⑤ $1-2\tan\theta$　⑥ $1-2\tan\dfrac{\theta}{2}$

⑦ $1-\tan^2\theta$　⑧ $1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}$

[エ の選択肢]

① $\sin^2\theta$　② $\sin^2\dfrac{\theta}{2}$　③ $\cos^2\theta$　④ $\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

[カ の選択肢]

① $2\sin^2\dfrac{\theta}{2}-1$　② $1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

③ $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$　④ $1-2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

[キ の選択肢]

① $\dfrac{1}{1+t^2}$　② $\dfrac{1}{1-t^2}$　③ $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

④ $\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$　⑤ $\dfrac{2t}{1-t^2}$　⑥ $\dfrac{2t}{t^2-1}$

[ク の選択肢]

① $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}$　② $\dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$　③ $\tan\theta\cos\theta$

④ $\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$　⑤ $\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$　⑥ $\tan\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

[ケ の選択肢]

① $1+t$　② $1-t$　③ $t-1$

④ $1+t^2$　⑤ $1-t^2$　⑥ t^2-1

PART2　三角関数の媒介変数表示

2　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t\ (t\neq\pm1)$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　(3)　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(2)　$1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$　より　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{1+t^2}$

よって　$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}-1=\dfrac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

（別解）

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ より　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$ より　$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$

よって　$\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}$　　すなわち　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ より

$t^2=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$　　$t^2(1+\cos\theta)=1-\cos\theta$　　$(1+t^2)\cos\theta=1-t^2$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(3)　(1)，(2)より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

第 9 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：⑤，ウ：⑧，エ：④，オ：②，
カ：③，キ：①，ク：③，ケ：⑤

[解説]

(1) $\tan\theta=\tan 2\cdot\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$ [A]

(2) $1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$ より [B]

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1}{1+t^2}$$

よって

$$\cos\theta=\cos 2\cdot\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$$ [A]

$$=2\cdot\frac{1}{1+t^2}-1=\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(3) (1)，(2)より

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$$ [B]

$$=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

[A] 2 倍角の公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=1-2\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

[B] 三角関数の相互関係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$